

解读可转债定价—关于 Zheng-Lin 模型的讨论

王曙明 ☎: (8610) 8357 1404

✉: wangshuming@chinastock.com.cn

本文重点关注可转债定价模型中的 Zheng-Lin 模型:

1. 对模型基本假设的合理性给出了严格的证明;
2. 鉴于模型原来关于赎回条款的处理有误, 本文对赎回决策的处罚机制进行了修正;
3. 对模型的定价思路进行了重新梳理。

1. 一个重要假设

考虑到中国可转债的发行条款中一般都规定了: 转股价格 K_C 随公司股利政策进行相应的调整, 这等价于: 转股期权是一个不考虑分红的美式期权, 它不会被提前执行。事实上我们可以证明以下命题:

Proposition 1: 假定对于可转债中的收益函数为

$$\text{Payoff}(S_t, t, B_t, K_C) = \max\left\{\frac{S_t * FV}{K_C} - B_t, 0\right\}$$

的美式转股期权, 具有固定分红比例为 d , 其中 B_t 为 t 时刻的纯债价值, FV 为债券面值, K_C 为转股价格。如果满足:

$$K_C^* = K_C / (1 + d), \text{ if } S_t^* = S_t / (1 + d),$$

其中 S_t^*, K_C^* 分别为分红后的股价及转股价格, 则该美式期权的最优行权时间点 (转股) 为转股到期日 T 。

Proof.

由于美式期权的最优行权时间点为分红的前一时刻，令该时间点为 t 。如果在 t 行权，则此时投资者的收益为

$$\frac{S_t * FV}{K_C} - B_t$$

如果投资者继续持有，那么分红后的即刻（ B_t 不变），美式期权价值为

$$C_A \geq \frac{S_t^* * FV}{K_C^*} - B_t = \frac{S_t * FV}{K_C} - B_t$$

显然，投资者不会选择在此时行权。因此，美式期权的最优行权点为转股到期日 T 。

□

于是在不考虑赎回、转股价格下调、回售的前提下，可转债在转股到期日的价值 P_T 可表示为：

$$P_T = \begin{cases} \frac{S_T * FV}{K_C}, & \frac{S_T * FV}{K_C} > B_T, \\ B_T, & otherwise, \end{cases}$$

其中 B_T 为转股到期日 T 的债券价值（这里考虑五洲转债情形，由于利息支付日 $> T$ ，如果转股，投资者将无法得到当期（一般为最后一期）利息，因此 B_T 包含了当期利息）。由以上收益函数，同时由于转股期权可作欧式看涨期权处理，可转债在时刻 t 的价值可表示为

$$P_t = C_E \left(\frac{S_T * FV}{K_C}, B_T \right) + B_t(r),$$

其中 $B_t(r)$ 为债券在 t 时刻以 r 为无风险利率折现下的债券现值， $C_E \left(\frac{S_T * FV}{K_C}, B_T \right)$ 为标的资产现值为 $\frac{S_T * FV}{K_C}$ ，行权价格为 B_T 的欧式看涨期权。Zheng-Lin Model 正是在该欧式看涨期权基础上，继续

叠加赎回、转股价格下调、回售等一系列条款（边界条件），进而对可转债进行定价。

上述 P_t 没有考虑债券的信用风险，因此这里我将 P_t 修改为

$$P_t = C_E \left(\frac{S_T * FV}{K_C}, B_T \right) + B_t(r + q),$$

其中 q 为信用利差，而 $B_t(r + q)$ 为债券在 t 时刻以信用债利率 $r + q$ 折现下的债券现值。

注意 1: 有些可转债不会支付转股时的应付利息。如：五洲转债规定“付息日前一个交易日为付息债券登记日，只有在付息债券登记日收市后登记在册的可转换公司债券持有人才有权获得当年的利息。”也就是说，如果在付息日之前投资人进行转股，则无法获得应付利息。类似的，一般说来，赎回和回售时，赎回价格 V_C 和回售价格 V_S 都包含了当期利息，即不再支付应

付利息。

2. 定价模型

假定股票服从几何布朗运动:

$$dS = rSdt + \sigma S\sqrt{\Delta t}\phi$$

其中 $\phi \sim N(0,1)$ 为标准正态分布。由于可转债是标的为股票的衍生品，其价格 P 所满足的 Black-Scholes-Merton 微分方程可表示为

$$\frac{\partial P}{\partial t} + rS \frac{\partial P}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = rP$$

根据各发行条款，该微分方程有以下边界条件:

(1) 满足赎回条件时，发行人的赎回决策

假定在 T 时刻满足赎回条件，发行人需要决策是否在 $T+M$ 时刻行使赎回权，而这取决于 $T+M$ 时刻的转换的价值 $\frac{S_{T+M} \cdot FV}{K_C}$ 与赎回价格 V_C 的大小关系：如果 $\frac{S_{T+M} \cdot FV}{K_C} > V_C$ ，则投资者会选择转股，那么行使赎回的目的达到；而如果 $\frac{S_{T+M} \cdot FV}{K_C} \leq V_C$ ，那么投资者会选择赎回，此时公司强制转股目的无法实现。Zheng-Lin Model 考虑在 T 时刻用 S_{T+M} 分布的 95% 置信水平下的最小股价 $S_{T+M,0.95}$ 来做判断。

首先，求出 $S_{T+M,0.95}$ ：

$$\Pr\{S_{T+M} \leq S_{T+M,0.95}\} = 5\%$$

上式等价于

$$\Pr\{\ln S_{T+M} \leq \ln S_{T+M,0.95}\} = 5\%$$

利用 $\ln S_{T+M}$ 的正态分布特性，可得：

$$S_{T+M,0.95} = S_T e^{\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)M - 1.96\sigma\sqrt{M}\right]}$$

再次，如果 $S_{T+M,0.95} * \frac{FV}{K_C} > V_C$ ，则行使赎回权；否则，不行使。

(2) 赎回日 t ，可转债的价值

当发行人行使了赎回权时，投资者不可以继续持有可转债，此时只能选择接受赎回或转股，因此

$$P_t = \max\left\{S_t * \frac{FV}{K_C}, V_C\right\},$$

其中 $R(t)$ 为 t 时刻的应付利息。根据上述 (1) 分析，正常情况下 (S_{T+M} 的走势基本服从其分布)， $P_t = S_t * \frac{FV}{K_C}$ ，即投资者会转股。

(3) 回售条款以及向下调整转股价格

发行人所追求的目标之一是以尽可能高的转股价格（发行人更低的转股成本）实现转股；由于向下调整转股价格会稀释公司股东权益，并降低控股股东的控制权，因此即使满足了向下调整转股价格的条件，发行人也不会主动调低转股价格。只有在面临回售压力时（回售条款的条件往往更强于向下修正转股价格的条件，即：当回售条件满足时，向下修正转股价格的条件亦满足），发行人才会决策是否向下调整转股价以及调整的幅度。

基于发行人的目的，发行人应当保证调整转股价格后的可转债持有价值（因为该模型已经证明正常情况下中国可转债是欧式期权，不会提前转股）稍微超过回售价格，理论上可表示为

$$P_t(K'_C) = V_S,$$

其中 V_S 为回售价格，将上式展开得到

$$V_S = P_t(K'_C) = \left[\frac{S_t * FV}{K'_C} N(d1) - B_T e^{-r(T-t)} N(d2) \right] + B_t(r + q),$$

得到

$$K'_C = \frac{S_t * FV * N(d1)}{V_S + B_T e^{-r(T-t)} N(d2) - B_t(r + q)}$$

(4) 未发生赎回，转股到期日 T 可转债的价值

4-1) 若不满足回售条件，则

$$P_T = \max\left\{\frac{S_T * FV}{K_C}, B_T\right\};$$

4-2) 若满足回售条件，则

$$P_T = \max \left\{ \frac{S_T * FV}{K_C}, V_S, B_T \right\}.$$

中国银河证券股份有限公司 博士后科研工作站

北京市西城区金融街 35 号国际企业大厦 C 座 100033

电话: 010-83571403

传真: 010-66568641

中国银河证券网址: www.chinastock.com.cn

中国银河证券博士后科研工作站网址: <http://www.chinastock.com.cn/yhwz/postdoc/index.shtml.chinastock.com.cn>